Wie müssen zwei projectivische Punktfelder auf einander gelegt werden, damit entsprechende congruente Polygone cyklisch zusammenfallen?

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

philosophischen Facultät hiesiger Universität

zur Erlangung der Doctorwürde

am Donnerstag, den 8. Mai 1879, 12 Uhr Mittags

im Musiksaale der Universität

öffentlich vertheidigen wird

Hermann Reim

gegen die Herren:

Oscar Gutsche, cand. math., und **Theodor Maschke**, cand. math.

ACAD. LUGDBAT BIBL.

BRESLAU.
F. W. Jungfer's Buchdruckerei.
1879.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn

Professor Dr. Schroeter

in innigster Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0078

Einleitung.

Die Anregung, aus welcher die nachfolgende Arbeit hervorgegangen ist, habe ich in dem mathematischen Seminar zu Breslau empfangen. Im Sommersemester 1877 habe ich nämlich in demselben an den Uebungen theilgenommen, in welchen unter Leitung des Herrn Professor Dr. Schröter, die projectivische Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe synthetisch behandelt wurde. Im Laufe dieser Behandlung wurde u. a. die Aufgabe gelöst: «Zwei projectivische Punktfelder so auf einander zu legen, dass entsprechende congruente Dreiecke cyklisch auf einander fallen», während die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Viereckslage zweier collinearen Felder eine offene blieb. Diese Frage erregte in hohem Grade mein Interesse und gab mir Veranlassung mich eingehender mit diesem Gegenstande zu beschäftigen. Es gelang mir auch bald, dieselbe zu beantworten, und ich stellte mir nunmehr die allgemeinere Aufgabe: «Zwei projectivische Punktfelder mit ihren Trägern so auf einander zu legen, dass entsprechende congruente Polygone cyklisch auf einander fallen», deren Lösung in der folgenden Abhandlung angegeben werden soll. — Das erste, was über diesen Gegenstand veröffentlicht wurde, ist eine Abhandlung des Herrn Professor Lüroth in Carlsruhe «über cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume», welche im Mai 1878 in den mathematischen Annalen erschien. Herr Lüroth löste in dem angeführten Aufsatz die Aufgabe: «In

der Ebene oder im Raume n reelle Punkte $a_1 \ldots\ldots a_n$ so zu bestimmen, dass es projectivische Transformationen der Ebene oder des Raumes giebt, welche a_1 in a_2, a_2 in $a_3 \ldots\ldots a_n$ in a_1 überführen; selbstverständlich musste er für die Ebene die Fälle $n \leqq 4$ und für den Raum die Fälle $n \leqq 5$ ausschliessen, weil zur Erzeugung zweier ebener projectivischer Gebilde 4 Paar und zur Erzeugung zweier räumlicher Gebilde 5 Paar entsprechender Elemente nach Willkür angenommen werden dürfen.

Es lässt sich nicht leugnen, dass Herr Lüroth theilweise zu denselben Resultaten gelangt ist, welche sich auch bei meiner Untersuchung ergeben haben z. B. dass n Punkte einer Punktgruppe in der Ebene entweder auf einer Geraden oder einem Kegelschnitt gelegen sind; nichtsdestoweniger besteht zwischen der von Herrn Lüroth behandelten Aufgabe und der meinigen der wesentliche Unterschied, dass bei der ersteren die projectivische Transformation der Ebene ermittelt werden soll, während sie bei der letzteren gegeben ist.

§ 1.

Es liegt keineswegs in meiner Absicht, eine vollständige und ausführliche Darstellung der projectivischen Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe zu geben, ich werde mich daher darauf beschränken, diejenigen Sätze, welche für die folgende Untersuchung von Wichtigkeit sind, an geeigneter Stelle ohne Beweis anzuführen. Dagegen halte ich es für nothwendig drei sich auf die gerade Punktreihe beziehende Hülfssätze vorauszuschicken, welche ich aus dem Anhang des ersten Abschnitts von Jacob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie Th. II entnommen habe, wo sie unter Aufgaben und Sätze als Uebungsbeispiele beigefügt sind.

1. Hülfssatz.

Werden zwei projectivische Punktreihen mit ihren Trägern auf einander gelegt, und geht man von irgend einem Punkte α_1 der zweiten aus, sucht den entsprechenden Punkt $\alpha_{1'}$ welcher als dem zweiten Träger angehörig α_2 heisse; sodann sucht man zu α_2 den entsprechenden Punkt $\alpha_{2'}$ der auf dem zweiten Träger α_3 heisse u. s. w., so kann es vorkommen, dass eine

n malige Wiederholung dieser Operation wieder zum Anfangspunkte zurückführt. Findet dies einmal statt, so trifft es immer ein nach n maligem Fortschreiten, von welchem Punkte man auch ausgehen mag.

Beweis. Gehen wir beispielsweise von dem Punkte β_1 aus, so ist derjenige Punkt, zu welchem man nach n maligem Fortgange gelangt, $\mathfrak{b}_n$, und man hat:

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1) = (\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3\ \mathfrak{b}_1) \equiv (\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \beta_2)$$
$$(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \beta_2) = (\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3\ \mathfrak{a}_4\ \mathfrak{b}_2) \equiv (\alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \beta_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha_n\ \alpha_1\ \alpha_2\ \beta_n) = (\mathfrak{a}_n\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_n) \equiv (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \mathfrak{b}_n)$$
$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \mathfrak{b}_n)$$

d. h. $\mathfrak{b}_n$ muss mit β_1 zusammenfallen.

2. Hülfssatz.

Die in Nr. 1 bezeichnete Lage zweier projectivischer Punktreihen kann nur eintreten, wenn die Punktreihen gleichlaufend sind, also die Potenz der projectivischen Beziehung negativ ist ($= -p^2$), und die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen um ein solches Stück d von einander abstehen, dass $d = 2p\cos\frac{\nu\pi}{n}$ ist, wo n die gegebene Anzahl der Punkte des Cyklus und ν eine zu n relative Primzahl bedeutet, welche $< \frac{n}{2}$ angenommen werden kann.

Beweis. Seien $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n\\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_1\end{pmatrix}$ zwei cyklisch auf einander liegende projectivische Punktreihen, und verbinden wir irgend einen Punkt O, welcher ausserhalb der Punktreihen liegt, mit $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$, so können wir uns jeden Verbindungsstrahl doppelt denken und haben zwei cyklisch-projectivische Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt O. Wir wollen untersuchen, ob der Punkt O so bestimmt werden kann, dass die beiden Strahlbüschel projectivisch gleich werden. Dazu ist erforderlich, dass $\angle(O\mathfrak{a}_1, O\mathfrak{a}_2) = \angle(O\alpha_1, O\alpha_2)$, $\angle(O\mathfrak{a}_2, O\mathfrak{a}_3) = \angle(O\alpha_2, O\alpha_3)$ etc. oder weil $\angle(O\mathfrak{a}_1, O\mathfrak{a}_2) \equiv \angle(O\alpha_2, O\alpha_3)$ etc., dass $\angle(O\mathfrak{a}_1, O\alpha_2) = \angle(O\mathfrak{a}_2, O\mathfrak{a}_3) = \angle(O\mathfrak{a}_3, O\mathfrak{a}_4)$ . . . d. h. O ist so zu bestimmen, dass von ihm aus die Strecken $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, ... gleich gross erscheinen. Im Allgemeinen ist es freilich nicht möglich einen Punkt zu finden, von welchem mehr als drei

auf einer Geraden liegende Strecken unter gleichen Winkeln gesehen werden, aber es lässt sich zeigen, dass in unserm Falle alle Strecken gleich gross erscheinen, sobald dies von dreien gilt. Setzen wir beispielsweise voraus, dass

$$\angle (O\alpha_1, O\alpha_2) = \angle (O\alpha_2, O\alpha_3) = \angle (O\alpha_3, O\alpha_4),$$

so bilden in den projectivischen Strahlbüscheln

$$O (a_1 a_2 \ldots . a_n) \text{ und } O (a_2 \ldots . a_n a_1)$$

die drei ersten Strahlen gleiche Winkel mit einander, mithin sind die Strahlbüschel projectivisch gleich und

$$\angle (O\alpha_3, O\alpha_4) = \angle (O\alpha_4, O\alpha_5) \ldots .$$

Hieraus erkennt man zugleich, dass die Strahlbüschel und folglich auch die Punktreihen gleichlaufend sind, denn es ist nach Voraussetzung $\angle (O\alpha_1, O\alpha_2)$ oder $\angle (O\alpha_2, O\alpha_3)$ nicht nur dem absoluten Werthe nach, sondern auch dem Vorzeichen nach $= \angle (O\alpha_2, O\alpha_3)$.

Schlägt man jetzt um O einen beliebigen Kreis, so wird dessen Peripherie durch die n Strahlen $O\alpha_1 \ldots \ldots O\alpha_n$ in 2 n Punkten getroffen, welche ein reguläres 2 n Eck bilden; demnach ist jeder der gleichen Winkel, welche ihren Scheitel in O haben, $= \frac{\pi}{n}$ oder allgemeiner $= \frac{\nu\pi}{n}$, da man aus den 2 n Schnittpunkten in mehrfacher Weise reguläre 2 n Ecke bilden kann, indem man die Kreisperipherie mehrmals durchläuft. Die Zahl ν ist nicht beliebig, sondern sie muss erstens zu n relativ prim sein; denn hätten ν und n einen gemeinsamen Theiler k, so würde sich der Cyklus schon nach $\frac{n}{k}$ maligem Fortschreiten schliessen. Zweitens darf $\nu < \frac{n}{2}$ angenommen werden, weil man im entgegengesetzten Falle keine neuen 2 n Ecke erhalten würde.

Wählen wir (Fig. 1) denjenigen Cyklus, welchem der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{b}_1$ (β_2) und die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen $\mathfrak{b}_2$ und β_1 angehören, so ist:

$$\angle O \beta_1 \mathfrak{b}_2 = \angle \beta_1 O \beta_2 = \frac{\nu\pi}{n}$$

$$\angle O \mathfrak{b}_2 \beta_1 = \angle \mathfrak{b}_2 O \mathfrak{b}_1 = \frac{\nu\pi}{n}$$

$$\triangle \mathfrak{b}_2 O \beta_1 \text{ gleichschenkelig.}$$

Sucht man denjenigen Punkt $\mathfrak{b}_3$ auf, welcher dem mit $\mathfrak{b}_2$ zusammenfallenden Punkt entspricht, so ist

$$\angle\, \mathfrak{b}_2\, O\, \mathfrak{b}_3 = \frac{\nu\pi}{n} \text{ also } \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_3 = O\, \mathfrak{b}_3$$

und man hat, wenn d die Distanz der ausgezeichneten Punkte bedeutet:

$$\mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_3 \,.\, d = p^2$$

$$O\, \mathfrak{b}_2 = 2\, \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_3 \,.\, \cos\frac{\nu\pi}{n}$$

$$d = 2\,.\,O\mathfrak{b}_2\,.\,\cos\frac{\nu\pi}{n}.$$

Die Multiplication dieser drei Gleichungen ergiebt

$$d^2 = 4\, p^2 \cos^2\frac{\nu\pi}{n}$$

$$d = 2\, p\,.\,\cos\frac{\nu\pi}{n}.$$

Aus dieser Relation erkennt man gleichzeitig, dass cyklisch-projectivische Punktreihen keine reellen Doppelpunkte haben, denn die Bedingung dafür, dass die Doppelpunkte gleichlaufender Punktreihen reell sind, ist $d \geqq 2\, p$.

3. Hülfssatz.

Werden zwei projectivische Punktreihen mit ihren Trägern beliebig auf einander gelegt, so ist jeder Punkt der vereinigten Träger doppelt aufzufassen als α_1 (β_1); in diesem doppelten Sinn entsprechen ihm zwei verschiedene Punkte α_1 und $\mathfrak{b}_1$. Bestimmt man zu diesen dreien den vierten harmonischen, dem anfänglichen α_1 (β_1) zugeordneten Punkt ξ_1, so beschreiben, während der erste Punkt den ganzen Träger durchläuft, die Punkte α_1 und ξ_1 ein Punktsystem, dessen reelle oder imaginäre Doppelpunkte mit den Doppelpunkten der auf einander liegenden projectivischen Punktreihen zusammenfallen.

Fig. 2. Beweis. Verbindet man zwei beliebige Punkte der Ebene P und Π resp. mit $\alpha_1\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{c}_1 \ldots$ und $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \ldots\ldots$, so erzeugen die projectivischen Strahlbüschel P und Π einen Kegelschnitt, welcher die Doppelpunkte der auf einander liegenden Punktreihen enthält. Die 4 Punkte P, Π, ($P\alpha_1$, $\Pi\alpha_1$), ($P\mathfrak{b}_1$, $\Pi\beta_1$) bilden ein dem Kegelschnitt einbeschriebenes Viereck, und die Diagonalpunkte desselben α_1, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ein Tripel conjugirter Punkte des Kegelschnitts. — Aus der harmonischen Eigenschaft

des genannten Vierecks folgt, dass die Verbindungslinie der Diagonalpunkte $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ durch den vierten harmonischen Punkt zu $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}_1$ α_1 d. h. durch ξ_1 hindurchgeht; demnach sind $\mathfrak{a}_1$ und ξ_1 conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, und da sämmtliche Paare conjugirter Punkte, welche auf einer Geraden liegen, ein Punktsystem bilden, welches dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, so besitzt das Punktsystem $\mathfrak{a}_1$ ξ_1 dieselben Doppelpunkte, wie die auf einander liegenden Punktreihen.

§ 2.

Da die allgemeine Lösung unserer Aufgabe von der Voraussetzung Gebrauch macht, dass $n \geqq 5$ ist, so wollen wir zuerst die speciellen Fälle $n = 3$ und $n = 4$ erledigen, damit die Lösung eine vollständige ist.

Wendet man die im ersten Hülfssatz angegebene Operation auf zwei mit ihren Trägern auf einander gelegte collineare Punktfelder an, so kann es vorkommen, dass man nach n maligem Fortschreiten wieder zum Ausgangspunkte zurückkommt. Auch hier gilt der Satz, dass dies immer zutrifft, sobald es einmal stattfindet, von welchem Punkte man auch ausgehen mag. Den allgemeinen Beweis dieses Satzes, dessen Gültigkeit sich nur auf solche Werthe von n erstreckt, welche $=$ oder > 5 sind, bringe ich erst an einer späteren Stelle; hier soll die Richtigkeit desselben nur für $n = 3$ und $n = 4$ bewiesen werden.

Beweis für den Fall $n = 3$:

Sei $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{a}_3$ und α_2 α_3 α_1 ein Paar entsprechender Dreiecke, welche cyklisch auf einander fallen, und sei $\mathfrak{x}_1$ ξ_1 ein beliebiges Paar conjugirter Punkte, welches als den andern Feldern angehörig mit ξ_2 und $\mathfrak{x}_3$ bezeichnet werden möge, so ist zu zeigen, dass $\mathfrak{x}_2$ mit ξ_3 zusammenfällt. Wegen der Projectivität der beiden Punktfelder ist:

$$\mathfrak{a}_2\,(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2) \barwedge \alpha_2\,(\alpha_1\,\alpha_3\,\xi_1\,\xi_2) \barwedge \mathfrak{a}_2\,(\alpha_3\,\alpha_1\,\xi_2\,\xi_1).$$

Der erste und letzte Büschel sind perspectivisch gelegen, weil in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind, mithin liegen die Punkte $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3,\ \alpha_2\,\alpha_1) = \mathfrak{a}_3$, $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}_1,\ \alpha_2\,\xi_2) = \mathfrak{x}_1$ und $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}_2,\ \alpha_2\,\xi_1)$

auf einer geraden Linie, oder mit andern Worten: es schneiden sich $\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}_2$, $\alpha_2\,\xi_1$ $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_3)$ in einem Punkte.

Ebenso ist:

$$\mathfrak{a}_3\,(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_3)\ \overline{\wedge}\ \alpha_3\,(\alpha_1\,\alpha_2\,\xi_1\,\xi_3)\ \overline{\wedge}\ \mathfrak{a}_3\,(\alpha_2\,\alpha_1\,\xi_3\,\xi_1)$$

mithin liegen

$(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1,\ \alpha_3\,\alpha_2) = \mathfrak{a}_1$, $(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_3,\ \alpha_3\,\xi_1) = \mathfrak{x}_3$ und $(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_1,\ \alpha_3\,\xi_3)$ auf einer Geraden oder:

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_1,\ \alpha_3\,\xi_3$$

schneiden sich in einem Punkte. Dieser Schnittpunkt ist offenbar mit dem ersten identisch, mithin müssen $\mathfrak{x}_2$ und ξ_3 mit $\mathfrak{a}_2$ (α_3) in einer geraden Linie liegen. Da in ähnlicher Weise dargethan werden kann, dass $\mathfrak{x}_2$ und ξ_3 auch mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ in gerader Linie liegen, so folgt die Identität der Punkte $\mathfrak{x}_2$ und ξ_3.

Beweis für den Fall n = 4:

Fig. 3. Wenn man unter der Voraussetzung, dass die entsprechenden Vierecke $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ und $\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_1$ cyklisch aufeinander fallen, folgende Bezeichnungen einführt:

$$(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{b}_1 \qquad (\alpha_1\,\alpha_2,\ \alpha_3\,\alpha_4) = \beta_1$$
$$(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{b}_2 \qquad (\alpha_1\,\alpha_4,\ \alpha_2\,\alpha_3) = \beta_2$$
$$(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{p} \qquad (\alpha_1\,\alpha_3,\ \alpha_2\,\alpha_4) = \pi$$

so erkennt man, dass die Punkte $\mathfrak{b}_1$ und β_2, $\mathfrak{b}_2$ und β_1, $\mathfrak{p}$ und π identisch sind; mithin ist $\mathfrak{p}$ (π) ein Doppelpunkt und $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ ein Doppelstrahl, auf welchem ein System gleicher Strecken verkehrt auf einander fällt. Das Punktsystem, welches der Doppelstrahl $\mathfrak{G}$ (Γ) enthält, ist vollständig bestimmt durch die Punkte $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ und durch die Schnittpunkte $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{G})$ und $(\alpha_1\,\alpha_3,\ \Gamma)$. Aus der harmonischen Lage dieser vier Punkte folgt, dass das Punktsystem ein elliptisches ist.

Gehen wir jetzt von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{x}_1$ (ξ_2) aus und bestimmen die Schnittpunkte $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{G}) = \mathfrak{c}_1$ (γ_2) und $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{G}) = \mathfrak{d}_1$ (δ_2), so können wir uns die conjugirten Punkte γ_1 und δ_1 construiren und wissen, dass wenn $\mathfrak{c}_1$ mit γ_2, $\mathfrak{d}_1$ mit δ_2 zusammenfällt, dies auch von den Punkten γ_1 und $\mathfrak{c}_2$, δ_1 und $\mathfrak{d}_2$ gilt. Dadurch sind wir in den Stand gesetzt, eine beliebige Anzahl conjugirter Punkte leicht zu construiren. Es ist:

$$\mathfrak{x}_1 = (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{d}_1) = (\alpha_2\,\gamma_2,\ \alpha_3\,\delta_2) = \xi_2$$
$$\mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{d}_2) = (\alpha_3\,\gamma_1,\ \alpha_4\,\delta_1) = \xi_3$$

$$\mathfrak{x}_3 = (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}_4\,\mathfrak{b}_1) = (\alpha_4\,\gamma_2,\ \alpha_1\,\delta\ ) = \xi_4$$
$$\mathfrak{x}_4 = (\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_2) = (\alpha_1\,\gamma_1,\ \alpha_2\,\delta_1) = \xi_1.$$

Aus diesem Schema ist ersichtlich, dass der Cyklus sich nach viermaliger Wiederholung der angegebenen Operation schliesst.

Zufolge des eben bewiesenen Satzes kann die Dreiecks- resp. Viereckslage zweier collinearen Punktfelder dann hergestellt werden, wenn es möglich ist den Fall einmal eintreten zu lassen, dass $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1\end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1\end{pmatrix}$ zusammenfallen.

Construktion der Dreieckslage: Man lege die Punktfelder beliebig auf einander, dann existirt auf der unendlich fernen Geraden stets ein Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{a}_1\infty$ und $\alpha_1\infty$, welches in dem andern Sinne resp. mit α_2 und $\mathfrak{a}_3$ bezeichnet werden möge. Verschiebt man nun die Felder parallel mit sich selbst bis die Punkte $\mathfrak{a}_2$ und α_3 auf einander zu liegen kommen, so bleiben die unendlich ferner Elemente ungeändert, und das Gewünschte ist geleistet, denn es fallen $\mathfrak{a}_1$ und α_2, $\mathfrak{a}_2$ und α_3, $\mathfrak{a}_3$ und α_1 zusammen. — Um die Bedingungen der Viereckslage zu erkennen, betrachte man dasjenige Viereck, von welchem zwei Ecken die conjugirten Punkte der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{a}_1$ (α_2) und α_1 $(\mathfrak{a}_4)$ sind; ihre entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_2$ (α_3) und α_4 $(\mathfrak{a}_3)$ müssen auf den Durchschnittslinien der Parallelebenen liegen, und weil die Schnittpunkte $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4)$ und $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3)$ conjugirte Punkte des elliptischen Punktsystems sind, welches die reelle Doppelgerade zum Träger hat, so muss einmal der Schnittpunkt der ausgezeichneten Geraden Mittelpunkt des Punktsystems sein, und zweitens muss $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ mit der Doppelgeraden parallel laufen. Dass die zuletzt angegebenen Bedingungen nicht blos nothwendig, sondern auch hinreichend für die Viereckslage sind, lässt sich in folgender Weise darthun:

Fig. 4. Seien $\mathfrak{a}_1$ (α_2) und α_1 $(\mathfrak{a}_4)$ die conjugirten unendlich fernen Punkte und $\mathfrak{a}_2$ und α_4 die entsprechenden, so ist nur zu zeigen, dass die mit $\mathfrak{a}_2$ und α_4 vereinigt liegenden Punkte einander entsprechen. Nenne ich den unendlich fernen Punkt der Doppelgeraden $\mathfrak{b}_1$ (β_2), ihren Mittelpunkt $\mathfrak{b}_2$ (β_1) und setze:

$$(\mathfrak{a}_2\,\alpha_4,\ \mathfrak{G}) = \mathfrak{x}_1 = \xi_2$$
$$(\alpha_2\,\alpha_4,\ \Gamma) = \xi_1 = \mathfrak{x}_2$$

ferner:

$$(\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{p}$$
$$(\xi_2\,\alpha_1,\ \xi_1\,\alpha_4) = \pi$$

so erkennt man, dass $\mathfrak{p}$ (π) ein Doppelpunkt ist.

Bezeichne ich den mit $\mathfrak{a}_2$ zusammenfallenden Punkt durch α_3, so ist $\alpha_3 = (\pi\,\alpha_1,\ \alpha_2\,\beta_1)$

mithin $\mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_1)$.

Der Punkt $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_1)$ ist aber identisch mit α_4, demnach liegen die Punkte $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ resp. mit $\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_1$ vereinigt.

Aus dem bisher Gesagten ergiebt sich folgende sehr einfache Construktion für die Viereckslage: Man lege die Punktfelder so auf einander, dass entsprechende congruente Dreiecke cyklisch auf einander fallen, und verschiebe sie in der Richtung der reellen Doppelgeraden so lange bis die ausgezeichneten Punkte der letzteren zusammenfallen.

Es sei hier noch bemerkt, dass Punktfelder, welche sich in der Dreiecks- oder Viereckslage befinden, nur einen reellen Doppelpunkt und folglich auch nur eine reelle Doppelgerade haben können, da dieselbe im ersten Falle zwei cyklisch auf einander liegende Punktreihen, deren Doppelpunkte nach § 1 Satz 2 imaginär sind, und im zweiten Falle ein elliptisches Punktsystem enthält.

§ 3.

Wir haben im Anfang des vorigen Paragraphen einen Satz ausgesprochen, dessen allgemeinen Beweis wir schuldig geblieben sind. Wir geben demselben an dieser Stelle eine etwas andere Form, aus welcher man leicht erkennen kann, wie die Aufgabe, mit deren Lösung wir uns in der folgenden Abhandlung beschäftigen wollen, durch ihn auf eine einfachere reducirt wird.

Wenn zwei collineare Felder so auf einander liegen, dass das n Eck $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ *mit dem n Eck* $\alpha_2 \ldots \alpha_n\,\alpha_1$ *zusammenfällt, so fallen alle entsprechenden congruenten n Ecke cyklisch auf einander.*

Beweis. Wir nehmen an, dass ein beliebiger Punkt $\mathfrak{b}_1$ mit β_2, $\mathfrak{b}_2$ mit β_3 u. s. w. zusammenfällt, so ist zu beweisen, dass der n^{te} Punkt $\mathfrak{b}_n$ wieder auf β_1 fällt.

Denkt man sich die Punkte $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$ mit jedem der Punkte $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ verbunden, so erhält man n Strahlbüschel mit den Mittelpunkten $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$.

Es ist dann:

$$\mathfrak{b}_1 (\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n) \equiv \beta_2 (\alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha_1) \overline{\wedge} \mathfrak{b}_2 (\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_1)$$
$$\mathfrak{b}_2 (\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_1) \equiv \beta_3 (\alpha_3 \ldots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2) \overline{\wedge} \mathfrak{b}_3 (\mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\mathfrak{b}_n (\mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{n-1}) \equiv \mathfrak{b}_n (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

$$\mathfrak{b}_n (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \overline{\wedge} \mathfrak{b}_1 (\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n) \overline{\wedge} \beta_1 (\alpha_1 \ldots \alpha_n).$$

Aus dieser Projectivität folgt entweder unsere Behauptung, dass $\mathfrak{b}_n$ mit β_1 zusammenfällt, oder dass $\mathfrak{b}_n$ und β_1 auf einem Kegelschnitt liegen, welcher dem n Eck $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ umschrieben ist. Im zweiten Falle sind alle Punkte $\mathfrak{b}$ auf diesem Kegelschnitt gelegen, denn es ist:

$$\alpha_1 (\alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1) \overline{\wedge} \alpha_n (\alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1)$$

folglich: $\mathfrak{a}_1 (\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{b}_1) \overline{\wedge} \mathfrak{a}_n (\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{b}_1)$,

d. h. $\mathfrak{b}_1$ liegt auf dem Kegelschnitt etc.

Um zu beweisen, dass sich auch in diesem Falle der Cyklus nach n maligem Fortschreiten schliesst, construire man die Schnittpunkte einer stets reell vorhandenen Doppelgeraden $\mathfrak{G}$ (Γ) mit den Seiten des n Ecks $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ und bezeichne sie folgendermassen:

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2, \mathfrak{G}) = \mathfrak{x}_1, (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3, \mathfrak{G}) = \mathfrak{x}_2 \ldots (\mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_1, \mathfrak{G}) = \mathfrak{x}_n$$
$$(\alpha_1 \alpha_2, \Gamma) = \xi_1, (\alpha_2 \alpha_3, \Gamma) = \xi_2 \ldots (\alpha_n \alpha_1, \Gamma) = \xi_n$$

Hieraus ist ersichtlich, dass $\mathfrak{x}_1$ mit ξ_2, $\mathfrak{x}_2$ mit $\xi_3 \ldots \mathfrak{x}_n$ mit ξ_1 identisch ist, dass also die Doppelgerade $\mathfrak{G}$ (Γ) der Träger einer cyklisch-projectivischen Punktgruppe ist, woraus wir beiläufig schliessen, dass derartig liegende Punktfelder nur einen reellen Doppelpunkt und nur eine reelle Doppelgerade haben können.

Sind ferner die Schnittpunkte der Doppelgeraden mit den Seiten des n Ecks $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$:

$$\mathfrak{y}_1 = (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2, \mathfrak{G}), \mathfrak{y}_2 = (\mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3, \mathfrak{G}) \ldots \ldots \mathfrak{y}_n = (\mathfrak{b}_n \mathfrak{b}_1, \mathfrak{G})$$
$$\eta_1 = (\beta_1 \beta_2, \mathfrak{G}), \eta_2 = (\beta_2 \beta_3, \Gamma) \ldots \ldots \eta_n = (\beta_n \beta_1, \Gamma)$$

so liegen die Punkte $\mathfrak{y}_1$ mit η_2, $\mathfrak{y}_2$ mit $\eta_3, \ldots \ldots \mathfrak{y}_{n-1}$ mit η_n vereinigt, folglich muss auch nach § 1 Satz 1 $\mathfrak{y}_n$ mit η_1 zusammenfallen.

Nun ist nach obiger Bezeichnungsweise $\mathfrak{b}_n$ der Schnittpunkt des Kegelschnitts mit $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{y}_n$ und $\mathfrak{b}_1$ der Schnittpunkt desselben Kegelschnitts mit $\beta_2\,\gamma_{11}$ und weil die Gerade $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{y}_n$ $(\beta_2\,\gamma_{11})$ mit dem Kegelschnitt ausser $\mathfrak{b}_1$ (β_2) nur noch einen Punkt gemein haben kann, so müssen die Punkte $\mathfrak{b}_n$ und β_1 identisch sein.

Der soeben allgemein für den Fall $n \geqq 5$ bewiesene Satz erleidet scheinbar eine Ausnahme, wenn n eine gerade Zahl ist. Sei n beispielsweise $= 2q$ und mögen die n Ecke

$$\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_q \qquad \mathfrak{a}_{q+1} \ldots \mathfrak{a}_n$$
$$\alpha_2 \ldots \alpha_{q+1} \quad \alpha_{q+2} \ldots \alpha_1$$

zusammenfallen, so kann man sich leicht überzeugen, dass, wenn man die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten construirt, der Cyklus sich schon nach q maligem Fortschreiten schliesst. Setzt man nämlich:

$$(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_{q+1}\ \mathfrak{a}_{q+2}) = \mathfrak{b}_1;\ (\alpha_1\,\alpha_2,\ \alpha_{q+1}\ \alpha_{q+2}) = \beta_1$$
$$(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_{q+2}\ \mathfrak{a}_{q+3}) = \mathfrak{b}_2;\ (\alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_{q+2}\ \alpha_{q+3}) = \beta_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\mathfrak{a}_q\,\mathfrak{a}_{q+1},\ \mathfrak{a}_n\,\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_q;\ (\alpha_q\,\alpha_{q+1},\ \alpha_n\,\alpha_1) = \beta_q$$

so erkennt man, dass $\mathfrak{b}_1$ mit β_2, $\mathfrak{b}_2$ mit $\beta_3 \ldots\ldots \mathfrak{b}_q$ mit β_1 identisch ist. Indessen erledigt sich dieser Widerspruch durch die Annahme, dass die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten sämmtlich auf der reellen Doppelgeraden liegen. Lägen die Punkte $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$ nicht sämmtlich auf der Doppelgeraden, so würde dies von keinem unter ihnen gelten, und die Linien $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_n\,\mathfrak{a}_1$ würden die Doppelgrade in einer cyklisch-projectivischen Punktgruppe von n Punkten treffen, während andererseits die Punktgruppe, welche von den Schnittpunkten der Doppelgraden mit den Seiten des Polygons $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_q$ gebildet wird, nur q Punkte enthalten würde.

Ein Widerspruch ähnlicher Art stellt sich bei der Betrachtung desjenigen Polygons heraus, welches von den Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken gebildet wird. Aus folgendem Schema:

$$\mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_{q+1},\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_{q+2}) = (\alpha_2\,\alpha_{q+2},\ \alpha_3\,\alpha_{q+3}) = \pi_2$$
$$\mathfrak{p}_2 = (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_{q+2},\ \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_{q+3}) = (\alpha_3\,\alpha_{q+3},\ \alpha_4\,\alpha_{q+4}) = \pi_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{p}_q = (\mathfrak{a}_q\,\mathfrak{a}_n,\ \mathfrak{a}_{q+1}\,\mathfrak{a}_1) = (\alpha_{q+1}\,\alpha_1,\ \alpha_{q+2}\,\alpha_2) = \pi_1$$

ist ersichtlich, dass der Cyklus der Punkte $\mathfrak{p}\ (\pi)$ sich schon nach q maligem Fortschreiten schliesst.

Um diesen Widerspruch zu beseitigen müssen wir annehmen, dass die Punkte $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_q$ sämmtlich in den reellen Doppelpunkt $\mathfrak{p}\ (\pi)$ fallen; denn würde dies nicht von allen gelten, so dürfte es von keinem behauptet werden, weil einem Strahl durch $\mathfrak{p}\ (\pi)$ nur wieder ein solcher entsprechen kann. Alsdann würden die Verbindungslinien des Doppelpunkts mit den Ecken des n Ecks eine cyklisch-projectivische Strahlengruppe von n Strahlen bilden, während die Gruppe der Linien $\mathfrak{pp}_1$, $\mathfrak{pp}_2 \ldots \mathfrak{pp}_q$ nur q Strahlen zählen würde.

Fassen wir das Resultat unserer letzten Untersuchung zusammen, so können wir es in folgendem Satz aussprechen:

Wenn zwei collineare Punktfelder so auf einander liegen, dass Polygone von gerader Seitenanzahl cyklisch auf einander fallen, so schneiden sich je zwei Gegenseiten) auf der reellen Doppelgeraden, während die Hauptdiagonalen, d. h. die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken sämmtlich durch den reellen Doppelpunkt gehen.*

§ 4.

Als nothwendige Bedingung der n Eckslage zweier projectivischen Ebenen hat sich ergeben, dass in der reellen Doppelgeraden zwei cyklisch-projectivische Punktreihen und folglich in dem reellen Doppelpunkt zwei cyklisch-projectivische Strahlbüschel vereinigt sind, deren Cyklus sich für ungerade n nach n maligem, und für gerade n nach $\frac{n}{2}$ maligem Fortschreiten schliesst; wir wollen nun untersuchen, ob diese Bedingung für die gesuchte Lage auch hinreichend ist.

Zu diesem Zwecke verschieben wir zwei beliebig auf einander liegende Felder parallel mit sich selbst in der Richtung einer Doppelgeraden, so dass der Abstand der Punkte, in

---

*) Hier sind nicht blos die Gegenseiten des n Ecks $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ zu verstehen, sondern die Gegenseiten sämmtlicher n Ecke, welche sich aus den n Punkten construiren lassen; es sind dies die Polygone $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{\nu+1} \mathfrak{a}_{2\nu+1} \ldots\ldots$, wobei ν eine zu n relative Primzahl bedeutet.

welchen dieselbe von den Durchschnittslinien der Parallelebenen getroffen wird, $= 2\,p\cos\frac{\nu\pi}{n}$ ist, wobei p die Potenz der Doppelgeraden und ν eine zu n relative Primzahl bedeutet; dann haben wir in dem reellen Doppelpunkt den Mittelpunkt einer cyklisch-projectivischen Strahlengruppe von n Strahlen.

Gehen wir daher von einem beliebigen Punkte ξ_1 (ξ_2) des Strahles $\mathfrak{p}a_1$ ($\pi\alpha_2$) aus, so muss ξ_2 (ξ_3) auf $\mathfrak{p}a_2$ ($\pi\alpha_3$) ..... ξ_n auf $\mathfrak{p}a_n$ ($\pi\alpha_1$) liegen, ohne dass ξ_n mit ξ_1 zusammenfallen braucht. Es zeigt sich hierbei, *dass der Cyklus sich entweder nach n maligem oder 2n maligem Fortschreiten oder nie schliesst, und dass man im letzteren Falle durch fortgesetzte Operation sich immer mehr und mehr dem reellen Doppelpunkte oder der reellen Doppelgeraden nähert, je nachdem man von dem einen oder dem andern Punktfelde ausgegangen ist.*

Beweis: Nehmen wir an, dass wir nach qn maligem Fortgange wieder zum Ausgangspunkte zurückkämen, so hätten wir beispielsweise auf dem Strahl $\mathfrak{p}a_1$ folgende zusammenfallenden Punkte:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{p} & \xi_1 & \xi_{n+1} & \xi_{2n+1} & \cdots\cdots & \xi_{(q-1)\,n+1} \\ \pi & \xi_2 & \xi_{n+2} & \xi_{2n+2} & \cdots\cdots & \xi_{(q-1)\,n+2} \end{array}$$

Nun ist:

$$\frac{(\mathfrak{p}\,\xi_1\,\xi_{n+1}\cdots\cdots\xi_{(q-1)\,n+1}) \wedge (\mathfrak{p}\,\xi_2\,\xi_{n+2}\cdots\cdots\xi_{(p-1)\,n+2}) \quad \wedge\cdots\wedge\,(\mathfrak{p}\,\xi_n\,\xi_{2n}\cdots\xi_{qn}) \wedge (\mathfrak{p}\,\xi_{n+1}\cdots\xi_1)}{(\mathfrak{p}\,\xi_1\,\xi_{n+1}\cdots\xi_{(q-1)\,n+1}) \wedge (\mathfrak{p}\,\xi_{n+1}\cdots\xi_1)}$$

d. h. die beiden cyklisch-projectivischen Punktreihen hätten einen Doppelpunkt $\mathfrak{p}$.

Der oben gelieferte Beweis macht offenbar von der Voraussetzung Gebrauch, dass $q \geq 3$ ist; er verliert seine Gültigkeit, wenn $q = 2$ oder $q = 1$ angenommen wird, weil in diesem Falle die obigen Projectivitätsgleichungen illusorisch werden.

Dass man sich, falls der Cyklus nach 2n maliger Wiederholung der bezeichneten Operation keinen Abschluss gefunden hat, entweder dem Doppelpunkt oder der Doppelgeraden nähert, erkennt man durch folgende Ueberlegung:

Denkt man sich diejenige Schaar von Kegelschnitten gelegt, welche die imaginären Doppelstrahlen des Büschels p (π) in ihren imaginären Doppelpunkten berührt, d. h. diejenige Schaar,

in Bezug auf welche das durch die imaginären Doppelpunkte von $\mathfrak{G}(\Gamma)$ bestimmte elliptische Punktsystem und das mit jenem perspectivische Strahlsystem $\mathfrak{p}(\pi)$ die der Geraden $\mathfrak{G}(\Gamma)$ und dem Punkte $\mathfrak{p}(\pi)$ zugehörigen Systeme sind, so geht durch jeden Punkt der Ebene ein und nur ein Kegelschnitt der Schaar.

Wählt man nun denjenigen eindeutig bestimmten Kegelschnitt K_1, welcher durch einen willkürlich angenommenen Punkt ξ_1 geht, so wird der conjugirte Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ gelegen sein, welcher K_1 entweder vollständig einschliesst oder ganz im Innern desselben liegt, weil beide Kegelschnitte eine imaginäre doppelte Berührung haben. Die Kegelschnitte K_1 und $\mathfrak{K}_1$ entsprechen einander vollständig, so dass jedem innerhalb von K_1 liegenden Punkt ein Punkt im Innern von $\mathfrak{K}_1$ zugeordnet ist und umgekehrt. Nehmen wir also an, $\mathfrak{x}_1$ (ξ_2) liege innerhalb von K_1, so muss der conjugirte Punkt $\mathfrak{x}_2$ (ξ_3) im Innern von $\mathfrak{K}_1$ (K_2) liegen, $\mathfrak{x}_3$ (ξ_4) innerhalb von $\mathfrak{K}_2$ (K_3) u. s. f.; wir gelangen also bei dieser Annahme in immer grössere Nähe des reellen Doppelpunktes, während wir uns bei entgegengesetzter Voraussetzung der Doppelgeraden genähert hätten.

Im Anfang dieses Paragraphen haben wir bewiesen, dass jeder Strahl des cyklisch-projectivischen Büschels $\mathfrak{p}(\pi)$ höchstens zwei Punkte einer Gruppe enthalten darf. Aus dieser Thatsache lässt sich zwar nicht mit Bestimmtheit schliessen, *dass die Punkte einer Gruppe auf einem Kegelschnitt gelegen sind*, aber wir können es doch mit einiger Wahrscheinlichkeit erwarten, und es ist in der That nicht schwer, sich von der Richtigkeit unserer Vermuthung zu überzeugen. Hat man nämlich die Gruppe $\begin{matrix}\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n \\ \xi_2 \ldots \xi_1\end{matrix}$ und construirt man wie oben den Kegelschnitt K_1, so führt die Annahme, dass $\mathfrak{x}_1$ innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts K_1 liegt, zu dem Widerspruch, dass auch $\mathfrak{x}_2 \ldots \mathfrak{x}_n$ a fortiori innerhalb resp. ausserhalb von K_1 liegen müssen; es muss also $\mathfrak{x}_1$ auf K_1 selbst gelegen sein, und dies kann auch von den übrigen Punkten der Gruppe gezeigt werden.

§ 5.

Nachdem wir erkannt haben, dass eine cyklisch-projectivische Gruppe in einer Ebene entweder auf einer Geraden (Doppelgeraden) oder auf einem Kegelschnitt gelegen ist, wollen wir uns zur Betrachtung von cyklisch-projectivischen Punktreihen wenden, deren Träger eine Curve zweiter Ordnung ist.

Sei $\begin{matrix} a_1 \ldots . a_n \\ \alpha_2 \ldots . \alpha_1 \end{matrix}$ eine auf einem Kegelschnitt gelegene Punktgruppe, so ist: $a_1\, a_n\, a_2\, a_3 \overline{\wedge} \alpha_1\, \alpha_n\, \alpha_2\, \alpha_3 \equiv a_n\, a_{n-1}\, a_1\, a_2$

$\overline{\wedge} \alpha_n\, \alpha_{n-1}\, \alpha_1\, \alpha_2 \equiv a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_n\, a_1 \overline{\wedge} a_n\, a_1\, a_{n-1}\, a_{n-2}$.

Folglich sind $a_1\, a_n$, $a_2\, a_{n-1}$, $a_3\, a_{n-2}$ Paare einer Involution, d. h. die Verbindungslinien der Punkte $a_1\, a_n$, $a_2\, a_{n-1}$, $a_3\, a_{n-2}$ gehen durch einen Punkt b_1.

Ferner ist:

$$a_n\, a_1\, a_3\, a_4 \overline{\wedge} a_n\, a_{n-1}\, a_2\, a_3 \overline{\wedge} a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_1\, a_2 \overline{\wedge} a_{n-2}\, a_{n-3}\, a_n\, a_1 \overline{\wedge} a_n\, a_1\, a_{n-2}\, a_{n-3}$$

d. h. $a_4\, a_{n-3}$ gehört derselben Involution an, die Verbindungslinie $a_4\, a_{n-3}$ geht durch denselben Punkt b_1.

Schliesst man in der Weise fort, so erkennt man, dass die Verbindungslinien solcher Punkte, deren Indicessumme $n + 1$ ist, sämmtlich durch einen Punkt gehen.

Daher ist:

$$\begin{array}{l} a_1\, a_2 \ldots . a_n \overline{\wedge} a_n\, a_{n-1} \ldots . a_1 \\ a_1\, a_2 \ldots . a_n \overline{\wedge} a_2\, a_3 \ldots . a_1 \\ \hline a_2\, a_3 \ldots . a_n\, a_1 \overline{\wedge} a_n\, a_{n-1} \ldots . a_1 \end{array}$$

d. h. $a_2\, a_n$, $a_3\, a_{n-1}$, $a_4\, a_{n-2}$ . . . schneiden sich in einem Punkt b_2.

In derselben Weise kann man darthun, dass auch $a_3\, a_n$, $a_4\, a_{n-1}$ . . . . . durch einen Punkt b_3 und man findet den allgemeineren Satz:

Alle Sehnen zwischen Punkten einer auf einem Kegelschnitt gelegenen Gruppe, für welche die Summe der Indices dieselbe ist, gehen durch denselben Punkt.

Wir haben ferner:

$$\begin{array}{l} a_{n-2}\,(a_1 \ldots . a_n) \overline{\wedge} a_n\,(a_1 \ldots . a_n) \\ \alpha_{n-1}\,(\alpha_2 \ldots . \alpha_1) \overline{\wedge} a_{n-1}\,(a_2 \ldots . a_1) \\ \hline a_n\,(a_1 \ldots . a_n) \overline{\wedge} a_{n-1}\,(a_2 \ldots . a_1). \end{array}$$

Die beiden Strahlbüschel sind perspectivisch gelegen, weil die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte sich selbst entspricht,

daher liegen die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen $(a_n\, a_1,\, a_{n-1}\, a_2)$, $(a_n\, a_2,\, a_{n-1}\, a_3)$, $(a_n\, a_3,\, a_{n-1}\, a_4)$ . . . . . auf einer Geraden. Diese Durchschnittspunkte sind offenbar dieselben Punkte, welche wir oben mit $b_1,\, b_2,\, b_3$ . . . . bezeichnet haben, und die Gerade, welche die Projectionspunkte b_1 . . . . . b_n enthält, ist mit der reellen Doppelgeraden unserer Punktfelder identisch; denn dem Punkte $b_1 = (a_1\, a_n,\, a_2\, a_{n-1}) = (a_2\, a_1,\, a_3\, a_n)$ entspricht in dem einen Sinne $(a_1\, a_n,\, a_2\, a_{n-1}) = (a_n\, a_{n-1},\, a_1\, a_{n-2})$ $= b_{n-1}$ und in dem anderen Sinne $(a_2\, a_1,\, a_3\, a_n) = b_3$, mithin entspricht der Geraden $b_1\, b_3$ die Linie $b_1\, b_{n-1}$ und weil $b_1\, b_3\, b_{n-1}$ in einer Geraden liegen, so ist die Linie $b_1\, b_3\, b_{n-1}$ die Doppelgerade.

Das Ergebniss der bisherigen Untersuchung können wir also in folgenden Satz zusammenfassen:

Wenn zwei collineare Punktfelder derartig auf einander liegen, dass das n Eck a_1 . . . . a_n *mit dem n Eck* a_2 . . . . $a_n\, a_1$ *zusammenfällt, so schneiden sich die Verbindungslinien solcher Punkte, deren Indicessumme dieselbe ist, in einem Punkte, und zwar liegen sämmtliche Projectionspunkte, deren Anzahl* $= n$ *ist, auf der reellen Doppelgeraden.*

§ 6.

Nach den Untersuchungen des § 4 hat sich die Bedingung, dass die reelle Doppelgerade zweier collinearer Felder die Trägerin zweier cyklisch-projectivischen Punktreihen ist, keineswegs als ausreichend für die n Eckslage erwiesen; wir haben deshalb im § 5 eine andere Eigenschaft cyklisch-projectivischer Punktgruppen in der Ebene hergeleitet, und wollen untersuchen, ob dieselbe zusammen mit der eben erwähnten die n Eckslage bedingt. In der That erweist sich diese Bedingung als hinreichend, ja wir brauchen sie nicht einmal in ihrer Vollständigkeit vorauszusetzen, sondern es genügt schon die Annahme, dass zwei Verbindungslinien solcher Punkte, deren Indicessumme gleich ist, sich auf der reellen Doppelgeraden schneiden. Die zuletzt ausgesprochene Behauptung ist für die Lösung unserer Aufgabe von der grössten Wichtigkeit; wir wiederholen dieselbe deshalb in der Form des folgenden Lehrsatzes:

Wenn zwei projectivische Ebenen so auf einander gelegt

werden, dass in der reellen Doppelgeraden zwei cyklisch-projectivische Punktreihen vereinigt sind, und ausserdem die Verbindungslinien zweier entsprechender Punkte a_1 *und* α_1, *welche als den anderen Feldern angehörig mit* a_2 *und* a_m *bezeichnet werden mögen, die reelle Doppelgerade* $\mathfrak{G}$ (Γ) *in demselben Punkte trifft, wie die Linien* $a_2\ \alpha_m$, *so fallen entsprechende congruente Polygone cyklisch auf einander.*

Fig. 5. Beweis. Man bezeichne den Punkt, in welchem die Doppelgerade von $a_1\ a_m$ und $a_2\ \alpha_m$ getroffen wird, mit b_1 (β_2) und in Folge dessen die Schnittpunkte $(a_2\ a_1, \mathfrak{G}) = b_2$ und $(\alpha_1\ \alpha_m, \Gamma) = \beta_1$.

Ferner sei:

$$(a_2\ b_1,\ b_2\ a_m) = \mathfrak{x}_1 \text{ und } (a_2\ \beta_1,\ \beta_2\ \alpha_m) = \xi_1,$$

so lässt sich zeigen, dass der Schnittpunkt von $a_1\ \mathfrak{x}_1$ und $\alpha_1\ \xi_1$ der reelle Doppelpunkt der Ebenen ist.

Fiele der fragliche Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ nicht mit seinem entsprechenden π zusammen, sondern beispielsweise mit μ, so müssten die beiden conjugirten Punkte π und $\mathfrak{m}$ resp. auf $\alpha_1\ \xi_1$ und $a_1\ \mathfrak{x}_1$ liegen, und wir hätten:

$$(a_1\ \mathfrak{m}\ \mathfrak{p}\ \mathfrak{x}_1) = (\alpha_1\ \mu\ \pi\ \xi_1) = (\xi_1\ \pi\ \mu\ \alpha_1)$$

d. h. $\alpha_1\ \xi_1$, $\mu\ \pi$ und $\mathfrak{x}_1\ \alpha_1$ schnitten sich in einem Punkte O.

Sei ferner:

$$(a_1\ \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{G}) = c_1 \text{ und } (\alpha_1\ \xi_1,\ \Gamma) = \gamma_1, \text{ so ist:}$$
$$(a_1\ \mathfrak{m}\ \mathfrak{p}\ c_1) = (\alpha_1\ \mu\ \pi\ \gamma_1) = (\gamma_1\ \pi\ \mu\ \alpha_1)$$

d. h. $a_1\ \gamma_1$, $\mathfrak{m}\ \pi$, $c_1\ \alpha_1$ schnitten sich in einem Punkte S; folglich müssten $\mathfrak{m}$, π, O, S in einer Geraden gelegen sein. Nun liegen aber die 3 Punkte O, $\mathfrak{p}$, S in gerader Linie, weil wegen der bekannten Eigenschaft der vollständigen Vierecke $a_1\ \alpha_1\ \mathfrak{x}_1\ \xi_1$ und $a_1\ \alpha_1\ c_1\ \gamma_1$ sowohl O$\mathfrak{p}$ als S$\mathfrak{p}$ die Linie $a_1\ \alpha_1\ b_1$ harmonisch theilen; folglich müssen die Punkte $\mathfrak{m}$ und π mit $\mathfrak{p}$ zusammenfallen, d. h. $\mathfrak{p}$ (π) ist der reelle Doppelpunkt.

Legt man denjenigen eindeutig bestimmten Kegelschnitt, welcher durch a_1 geht und die durch $\mathfrak{p}$ (π) gehenden imaginären Doppelstrahlen in ihren imaginären Doppelpunkten berührt, d. h. denjenigen Kegelschnitt, welcher das Punktsystem und das Strahlsystem zu zugeordneten hat, das dieselben Doppelelemente besitzt, wie die Doppelgerade $\mathfrak{G}$ (Γ) und die Strahlen-

gruppe $\mathfrak{p}(\pi)$, so lässt sich zeigen, dass derselbe auch durch α_1 geht.

Nach § 1 Satz 3 erhält man die Punktepaare der elliptischen Involution auf $\mathfrak{G}(\Gamma)$, indem man zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{b}_1(\beta_2)$ die in doppeltem Sinn entsprechenden β_1 und $\mathfrak{b}_2$ bestimmt und zu diesen dreien den vierten harmonischen, dem anfänglichen $\mathfrak{b}_1(\beta_2)$ zugeordneten $\mathfrak{b}_1^1$ construirt.

$\mathfrak{b}_1^1\ \mathfrak{p}$ ist die Polare von $\mathfrak{b}_1$, und da diese, wie leicht zu erkennen, mit S O R zusammenfällt, so theilt sie $\mathfrak{a}_1\ \alpha_1\ \mathfrak{b}_1$ harmonisch, mithin liegt α_1 auf dem fraglichen Kegelschnitt. Hieraus folgt weiter, dass der Kegelschnitt sich selbst entspricht; und weil derselbe n zusammengehörige Strahlen des cyklisch-projectivischen Büschels $\mathfrak{p}(\pi)$ in 2 n Punkten trifft, so muss der Cyklus spätestens nach 2 n maligem Fortgange seinen Abschluss finden. Der Index m ist also entweder $=$ n oder $=$ 2 n.

§ 7.

Wir wollen jetzt dasjenige Polygon betrachten, von welchem zwei Ecken in das conjugirte Punktepaar auf der unendlich fernen Geraden hineinfallen.

Fig. 6. Seien $\mathfrak{a}_1\ \infty$ und $\alpha_1\ \infty$ diese unendlich fernen Punkte und fallen dieselben resp. mit $\alpha_2\ \infty$ und $\mathfrak{a}_m\ \infty$ zusammen, so liegen die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_2$ und α_m auf den Durchschnittsgeraden der Parallelebenen und ihre Verbindungslinie $\mathfrak{a}_2\ \alpha_m$ muss der Doppelgeraden parallel sein.

Wir haben nun, um die gesuchte Lage zweier collinearen Punktfelder herzustellen, die beiden Bedingungen zu erfüllen, welche sich im § 6 als hinreichend erwiesen haben, d. h. wir haben darauf zu achten, 1) dass $\mathfrak{a}_2\ \alpha_m$ der Doppelgeraden parallel ist und 2) dass der Abstand der ausgezeichneten Punkte auf der Doppelgeraden $=$ $2p\cos\frac{\nu\pi}{n}$ werde.

Beide Bedingungen werden durch folgende Construktion erreicht:

Man lege die Punktfelder beliebig auf einander und bezeichne die conjugirten unendlich fernen Punkte mit $\mathfrak{a}_1$ und α_1, welche in dem anderen Sinne α_2 und $\mathfrak{a}_m$ heissen mögen, sodann

verschiebe man die Felder parallel mit sich selbst bis die Punkte $\mathfrak{a}_2$ und α_m zusammenfallen. Sei $\mathfrak{b}_1$ (β_2) der unendlich ferne Punkt der auf diese Weise erhaltenen Doppelgeraden $\mathfrak{G}$ (Γ), so verschiebe man die Punktfelder nochmals und zwar in der Richtung von $\mathfrak{G}$ (Γ) bis der Abstand der Punkte $\mathfrak{b}_2$ β_1 $=$ $2p \cos \frac{\nu\pi}{n}$ wird, so fallen entsprechende congruente Polygone auf einander, deren Eckenanzahl entweder n oder 2n ist.

Dieselbe Construktion kann etwas kürzer folgendermassen ausgedrückt werden:

Man stelle die Dreieckslage her und verschiebe die Punktfelder in der Richtung der reellen Doppelgeraden bis der Abstand ihrer ausgezeichneten Punkte $2p \cos \frac{\nu\pi}{n}$ beträgt.

Es bleibt noch übrig zu entscheiden, in welchem Falle die so construirte cyklisch-projectivische Punktgruppe aus n Punkten und in welchem sie aus 2n Punkten besteht. Wir können uns bei der Entscheidung dieser Frage auf ungerade Werthe von n beschränken, weil für gerade n in jedem Falle eine Gruppe von 2n Punkten gebildet wird; denn aus der gegentheiligen Annahme würde folgen, dass auf der reellen Doppelgeraden der Cyklus schon nach $n/_2$ maligem Fortschreiten seinen Abschluss findet.

§ 8.

Die Verschiebung der Punktfelder, welche wir nach Herstellung der Dreieckslage in der Richtung der Doppelgeraden vorgenommen haben, kann in zweifacher Weise ausgeführt werden:

1) indem man die Distanz der ausgezeichneten Punkte vergrössert oder verkleinert, ohne dass eine Begegnung derselben stattfindet. Die Verschiebung beträgt in diesem Falle $p - 2p \cos \frac{\nu\pi}{n}$, wenn man die Richtung derjenigen Verschiebung als positiv betrachtet, welche die Punkte $\mathfrak{b}_2$ β_1 einander nähert;
2) indem man die Entfernung der Punkte $\mathfrak{b}_2$ β_1 zuerst verkleinert und nach ihrer Begegnung vergrössert, so dass die Verschiebung $p + 2p \cos \frac{\nu\pi}{n}$ beträgt.

Die erste Verschiebung gestattet die Annahme zweier Fälle, die aber im Wesentlichen nicht von einander verschieden sind, nämlich $p - 2p \cos \frac{\nu\pi}{n} > 0$ und $p - 2p \cos \frac{\nu\pi}{n} < 0$.

Im ersten Falle (Fig. 7 a) liegt der Schnittpunkt der ausgezeichneten Geraden zwischen der Doppelgeraden und der Linie $a_2 \alpha_m$, im zweiten Falle (Fig. 7 b) ausserhalb derselben. Wir erhalten den Doppelpunkt $\mathfrak{p}(\pi)$ zufolge des in § 6 bewiesenen Satzes, indem wir durch b_2 und β_1 Parallelen zu den ausgezeichneten Graden ziehen, welche $a_2 \alpha_m$ in den entsprechenden Punkten χ_1 und ξ_1 treffen und durch χ_1 und ξ_1 wiederum Parallelen zu den ausgezeichneten Geraden legen, welche sich in $\mathfrak{p}(\pi)$ treffen; letztere schneiden die Doppelgerade in den zugeordneten Punkten c_1 und γ_1. In beiden Fällen sind die Strecken $b_2 c_1$ und $\beta_1 \gamma_1$ dem absoluten Werthe nach $= p$ und liegen so, dass sie sich gegenseitig ausschliessen.

Wendet man die unter 2) angegebene Verschiebung an, so ist immer $a_2 \alpha_m > b_2 \beta_1$, mithin kann der Schnittpunkt der ausgezeichneten Geraden niemals zwischen $a_2 \alpha_m$ und $b_2 \beta_1$ liegen; dagegen ist der Doppelpunkt zwischen den genannten Linien oder ausserhalb derselben gelegen, je nachdem $b_2 \beta_1 >$ oder $< p$ ist; in jedem Falle müssen Doppelpunkt und Schnittpunkt der ausgezeichneten Geraden auf entgegengesetzten Seiten der Doppelgeraden liegen, und es findet somit gerade das Umgekehrte statt, wie bei der ersten Verschiebung.

Aus der Construktion des Doppelpunkts $\mathfrak{p}(\pi)$ und der conjugirten Punkte auf der Doppelgeraden c_1 und γ_1 erkennt man, dass die Strecken $b_2 c_1$ und $\beta_1 \gamma_1$ dem absoluten Werthe nach $= p$ sein müssen; sie liegen aber in diesem Falle so, dass sie sich gegenseitig trennen.

Wenn m, die Anzahl der Ecken des Polygons, ungerade ist, also $= n$, so ist $1 + m$ gerade. Nun trifft die Sehne $a_1 a_m$ die Doppelgerade in ihrem unendlich fernen Punkte, und da die Verbindungslinien aller Punkte, deren Indicessumme gleich ist, durch denselben Punkt gehen, so muss es einen Punkt der Gruppe geben, in welchem die Tangente an den um das Polygon beschriebenen Kegelschnitt der Doppelgeraden parallel ist. Ist dagegen m gerade, so ist $1 + m$ ungerade,

es giebt dann keinen Punkt der Gruppe, in welchem die Tangente an den Kegelschnitt mit der Doppelgeraden gleichgerichtet ist. Diejenigen Punkte, welche die genannte Eigenschaft besitzen, liegen auf der Polare von $\mathfrak{b}_1\,(\beta_2)$, und diese ist nach § 1 Satz 3 die Verbindungslinie des Mittelpunktes von $\mathfrak{b}_2\,\beta_1$ mit $\mathfrak{p}\,(\pi)$.

Hieraus ergiebt sich folgendes Kriterium:

Gehört der Mittelpunkt von $\mathfrak{b}_2\,(\beta_1)$ demselben Cyklus auf der Doppelgeraden an, wie $\mathfrak{c}_1$ und γ_1, so ist m ungerade, d. h. die cyklisch-projectivische Gruppe der Ebene besteht nur aus n Punkten. Gehört dagegen der Mittelpunkt von $\mathfrak{b}_2\,(\beta_1)$ nicht demselben Cyklus an wie $\mathfrak{c}_1$ und γ_1, so ist m gerade, d. h. die Gruppe wird von 2 n Punkten gebildet.

§ 9.

Das am Ende des vorigen Paragraphen angegebene Kriterium wollen wir einer eingehenderen Betrachtung unterwerfen.

Hat man eine cyklisch-projectivische Gruppe auf einer Geraden, so kann nach § 1 Satz 2 ein Punkt O so bestimmt werden, dass die beiden projectivischen Strahlbüschel, welche man durch Verbindung des Punktes O mit den Punkten der Gruppe erhält, projectivisch gleich werden. Zwei benachbarte Strahlen bilden in diesem Falle Winkel von der Grösse $\frac{\pi}{n}$.

Wählt man auf der Geraden diejenige Gruppe, welcher der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{b}_1\,(\beta_2)$ angehört, und verbindet die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen $\mathfrak{b}_2$ und β_1 mit O, so ist nach § 1 $\triangle\ \mathfrak{b}_2\ \mathrm{O}\ \beta_1$ gleichschenkelig und jeder der beiden Basiswinkel $= \frac{\nu\,\pi}{n}$.

Fig. 8. Trägt man von $\mathfrak{b}_2$ und β_1 aus die Potenz der Punktreihen bis $\mathfrak{c}_1$ und γ_1 derartig ab, dass $\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_1$ und $\beta_1\,\gamma_1$ kein Stück gemein haben, so ist:

$$\mathrm{O}\,\mathfrak{b}_2 = \frac{\mathfrak{b}_2\,\beta_1}{2\cos\frac{\nu\,\pi}{n}} = \mathrm{p}$$

mithin $\triangle\ \mathrm{O}\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{c}_1$ gleichschenkelig und $\angle\ \mathrm{O}\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{b}_2 = \frac{\nu\,\pi}{2\,n}$.

Ist daher ν gerade, so gehört $\mathfrak{c}_1$ derselben Gruppe an, wie der unendlich ferne Punkt; ist dagegen ν ungerade, so gehört

$\mathfrak{c}_1$ demjenigen Cyklus an, welcher durch die Halbirungslinien der Winkel O bestimmt wird.

Fig. 9. Gerade das Umgekehrte findet statt, wenn man von den Durchschnittspunkten der Parallelstrahlen $\mathfrak{b}_2$ und β_1 aus die Potenz der Punktreihen bis $\mathfrak{c}_1$ und γ_1 in der Weise abträgt, dass die Strecken $\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_1$ und $\beta_1\,\gamma_1$ sich gegenseitig trennen.

Es ist nämlich $O\,\mathfrak{b}_2 = (p) = \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_1$

$$\text{und da } \angle\, O\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_1 = \frac{\nu\pi}{n}$$

$$\text{so ist } \angle\, O\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_2 = \frac{(n-\nu)\,\pi}{2\,n}.$$

Da n ungerade, so gehört der Strahl $O\,\mathfrak{c}_1$ nur dann demselben Cyklus an, wie der unendlich ferne Punkt, wenn ν ebenfalls ungerade ist. Ist dagegen ν gerade, so halbirt $O\,\mathfrak{c}_1$ einen der Winkel um O, in diesem Falle sind $\mathfrak{c}_1$ und der Mittelpunkt von $\mathfrak{b}_2\,\beta_1$ Punkte derselben Gruppe.

Durch das Resultat der letzten Betrachtung sind wir in den Stand gesetzt, die im § 7 ausgesprochene und indirect bewiesene Behauptung nachträglich zu verificiren, dass nämlich die Punktgruppen in der Ebene aus 2 n Punkten bestehen, wenn der Cyklus auf der Doppelgeraden von einer geraden Anzahl von Punkten gebildet wird. Ist n gerade, so gehört der Mittelpunkt von $\mathfrak{b}_2\,\beta_1$ stets demselben Cyclus an wie der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{b}_1\,(\beta_2)$; nun ist:

$$\angle\, O\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_2 = \frac{\nu\pi}{2\,n} \text{ bei der ersten Verschiebung,}$$

$$\angle\, O\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_2 = \frac{(n-\nu)\,\pi}{2\,n} \text{ bei der zweiten Verschiebung,}$$

mithin können, weil ν und in Folge dessen auch $n-\nu$ immer ungerade sein müssen, $O\,\mathfrak{c}_1$ und der Parallelstrahl $O\,\mathfrak{b}_1$ niemals Strahlen derselben Gruppe sein.

§ 10.

Nach den Erörterungen des letzten Paragraphen ist leicht zu ersehen, dass wir bei der Lösung der Aufgabe: «Zwei collineare Punktfelder so auf einander zu legen, dass entsprechende congruente n Ecke cyklisch zusammenfallen» drei Fälle zu unterscheiden haben: 1) n ist ungerade, 2) n ist gerade, aber nicht durch 4 theilbar, 3) n ist durch 4 theilbar.

Die Construktion gestaltet sich für diese drei verschiedenen Fälle folgendermassen, wenn wir die in § 8 definirte Richtung der Verschiebung festhalten:

1) n ist ungerade. Man stelle die Dreieckslage her und verschiebe die Punktfelder in der Richtung der reellen Doppelgeraden um $p + 2\,p\cos\frac{\nu\pi}{n}$, wenn ν gerade, und um $p - 2\,p\cos\frac{\nu\pi}{n}$, wenn ν ungerade ist.

2) n ist gerade, aber nicht durch 4 theilbar. Man stelle die Dreieckslage her und verschiebe die Punktfelder in der Richtung der Doppelgeraden um $p + 2\,p\cos\frac{\nu\pi}{n/2}$, wenn ν ungerade, und um $p - 2\,p\cos\frac{\nu\pi}{n/2}$, wenn ν gerade ist.

3) n ist durch 4 theilbar. Man stelle die Dreieckslage her und verschiebe die Punktfelder in der Richtung der Doppelgeraden um $p + 2\,p\cos\frac{\nu\pi}{n/2}$ oder um $p - 2\,p\cos\frac{\nu\pi}{n/2}$.

Fragen wir nach der Anzahl aller möglichen Lösungen der behandelten Aufgabe, so haben wir zweierlei zu untersuchen: 1) auf wie viel Arten die Dreieckslage hergestellt werden kann und 2) auf wie viel Arten die n Eckslage aus der Dreieckslage hervorgeht.

Um die erste Frage zu beantworten, erinnern wir uns an die Construktion der Dreieckslage, welche wir in § 2 angegeben haben; wir sehen, dass dieselbe ganz unabhängig ist von dem Richtungsunterschied der ausgezeichneten Geraden, und schliessen daraus, dass es eine einfache Unendlichkeit von verschiedenen Construktionen giebt, durch welche die Dreieckslage erreicht wird.

Die zweite Frage ist offenbar identisch mit der Frage nach der Anzahl der verschiedenen Werthe von ν.

Bezeichnet man die Anzahl der Punkte des in sich zurückkehrenden Cyklus auf der Doppelgeraden mit q, so ist q entweder $= n$ oder $= \frac{n}{2}$; nun bedeutet nach § 1 Satz 2 ν eine zu q relative Primzahl, welche $< \frac{q}{2}$ ist. Die Anzahl dieser

Zahlen ist $\frac{1}{2}\ \varphi\ (q)$, weil jeder unter $\frac{q}{2}$ liegenden Primzahl ν eine complementäre $q - \nu > \frac{q}{2}$ entspricht. Hieraus ergiebt sich für die drei oben erwähnten Fälle als Anzahl der verschiedenen Ueberführungen der Dreieckslage in die n Eckslage:

1) für ungerade n: $\frac{\varphi\ (q)}{2} = \frac{1}{2}\ \varphi\ (n)$,

2) für gerade n, welche nicht durch 4 theilbar sind: $\frac{1}{2}\ \varphi\ (q) = \frac{1}{2}\ \varphi\ \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\ \varphi\ (n)$,

3) für solche n, welche durch 4 theilbar sind:
$2\ .\ \frac{1}{2}\ \varphi\ (q) = \varphi\ \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\ \varphi\ (n)$.

Lebenslauf.

Verfasser, geboren am 15. November 1854 zu Guhre, Kreis Militsch, ev.-lutherischer Confession, besuchte seit Michaelis 1864 das Magdalenäum zu Breslau und ging zu Michaelis 1872 auf das Johanneum über, welches er ein Jahr später mit dem Zeugniss der Reife verliess. Im October 1873 wurde er bei der philosophischen Fakultät hiesiger Universität immatrikulirt und hörte während seiner Studienzeit die Vorlesungen folgender Herren Professoren:

Dorn, Galle, Grube, Krause, Loewig, Meyer, Roemer, Rosanes, Schroeter.

Allen diesen Herren spricht Verfasser an dieser Stelle seinen herzlichsten Dank für die ihm zu Theil gewordene Anregung und Förderung aus.

Thesen.

1. Der mathematische Unterricht in den Schulen muss die Geometrie vor der Algebra bevorzugen.
2. Die Behauptung, dass in der Stereometrie die gezeichneten Figuren mehr schaden als nützen, ist falsch.
3. Es existirt bis jetzt noch keine Theorie der parallelen Linien, welche in allen Theilen vollkommen wäre.